

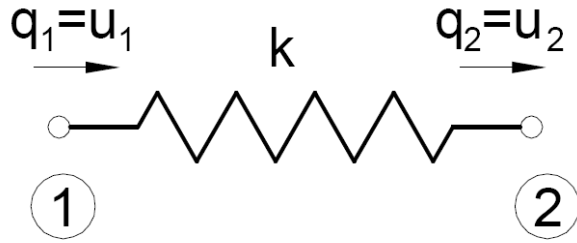


# Metoda elementów skończonych (MES1)

Wykład 7A. Element prętowy

04.2022

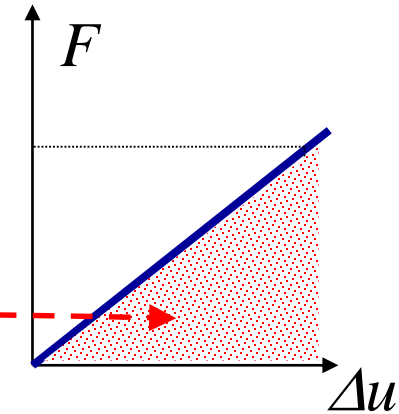
# Przypomnienie – element typu sprężyna



wektor parametrów węzłowych:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$$

$2 \times 1$



energia sprężysta elementu:

$$F = k \cdot \Delta u = k \cdot (u_2 - u_1)$$

$$U_e = \frac{1}{2} F \Delta u = \frac{1}{2} k (\Delta u)^2 = \frac{1}{2} k (u_2 - u_1)(u_2 - u_1).$$

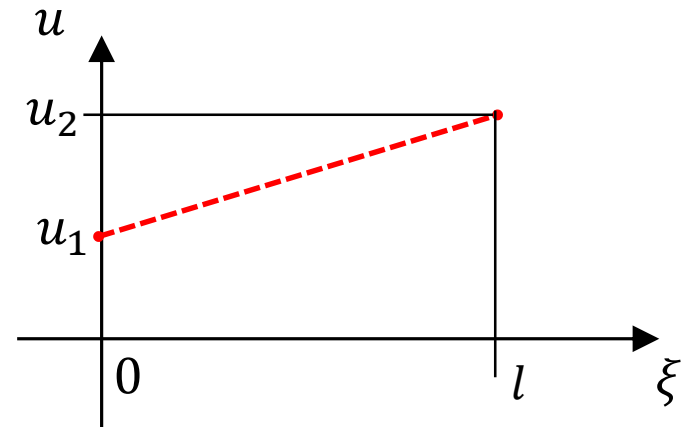
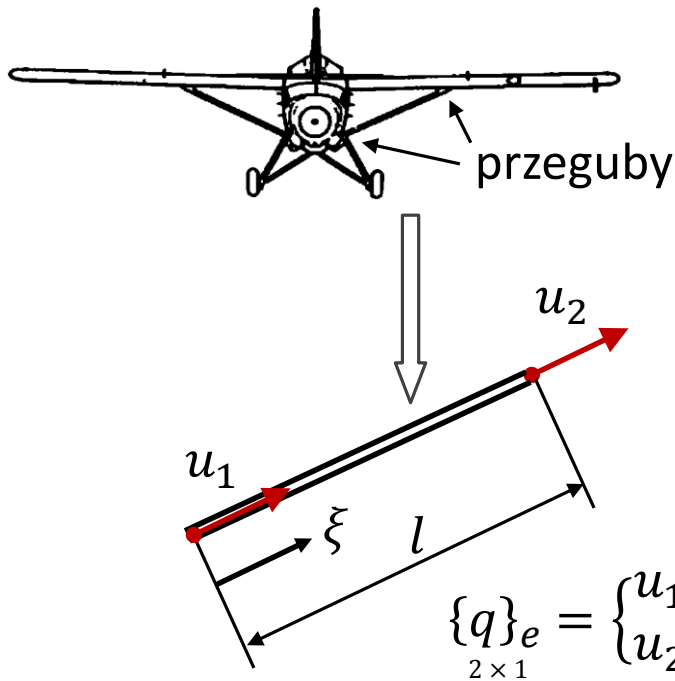
$$U_e = \frac{1}{2} [u_1, u_2] \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

macierz sztywności elementu:

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$U_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e$$

# Przypomnienie - funkcje kształtu dla elementu skończonego reprezentującego zastrzał



funkcje liniowe:

$$u(\xi) = \frac{u_2 - u_1}{l} \xi + u_1$$

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \frac{u_2 - u_1}{l} \xi + u_1 = \frac{u_2}{l} \xi - \frac{u_1}{l} \xi + u_1 = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) u_1 + \frac{\xi}{l} u_2 = \\ &= N_1(\xi) \cdot u_1 + N_2(\xi) \cdot u_2 = [N_1, N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e = [N(\xi)] \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_e \end{aligned}$$

$1 \times 2$       $2 \times 1$

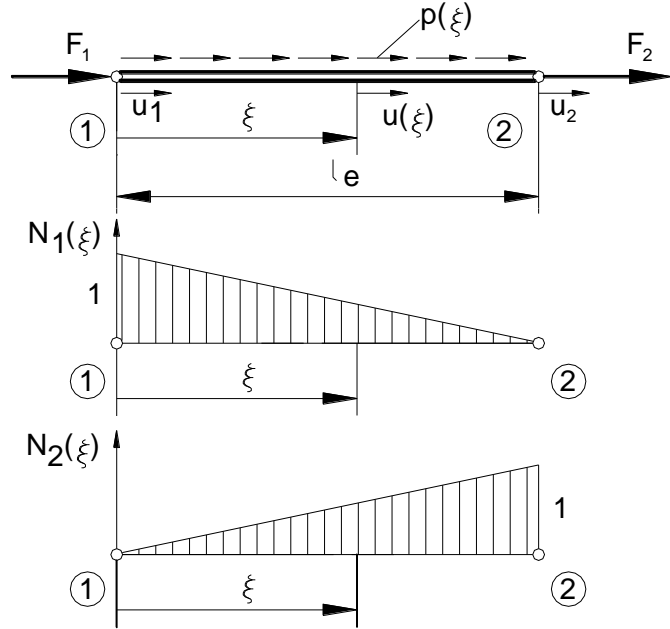
funkcje kształtu:

$$N_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l}$$

;

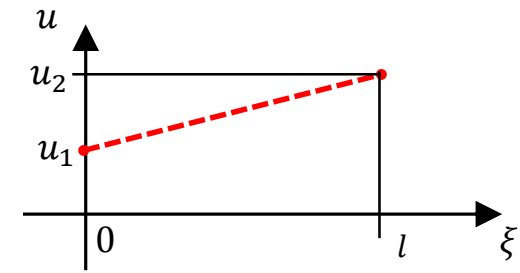
$$N_2(\xi) = \frac{\xi}{l}$$

# Element skończony pręta pod obciążeniami osiowymi



Przemieszczenie osiowe:

$$u(\xi) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l_e} \xi$$



Wektor parametrów węzłowych:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$$

Aproksymacja pola przemieszczeń osiowych:

$$u(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)u_1 + \frac{\xi}{l}u_2 = [N_1(\xi), N_2(\xi)] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = [N] \{q\}_e$$

Wektor funkcji kształtu:

$$[N] = [N_1(\xi), N_2(\xi)]$$

Funkcje kształtu:

$$N_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l_e}, \quad N_2(\xi) = \frac{\xi}{l_e}$$

Energia sprężysta elementu:

$$U_e = \frac{1}{2} A \int_0^{l_e} \sigma(\xi) \varepsilon(\xi) d\xi = \frac{EA}{2} \int_0^{l_e} (\varepsilon(\xi))^2 d\xi$$

Odształcenie osiowe:

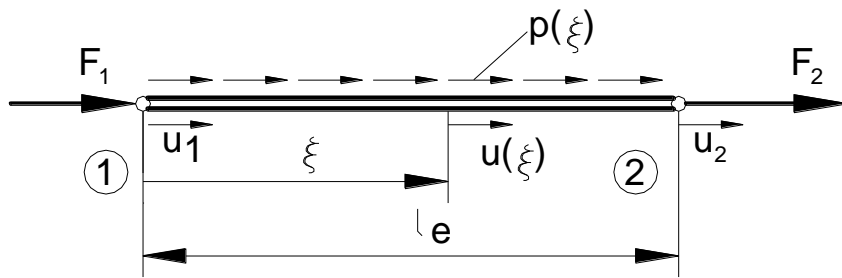
$$\varepsilon(\xi) = \frac{du}{d\xi} = [N'_1, N'_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

$$U_e = \frac{EA}{2} \int_0^{l_e} [q_1, q_2]_e \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix} [N'_1, N'_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e d\xi =$$

$$= \frac{EA}{2} [q_1, q_2]_e \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N'_1 N'_1 & N'_1 N'_2 \\ N'_2 N'_1 & N'_2 N'_2 \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e,$$

$$[k]_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Obciążenie zastępcze pręta obciążonego osiowo



Obciążenie ciągłe:  $p(\xi) \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$

Aproksymacja pola przemieszczeń osiowych:

$$u(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) u_1 + \frac{\xi}{l} u_2 = \left[ N_1(\xi), N_2(\xi) \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

Praca obciążenia osiowego:

$$W_{ze}^p = \int_0^{l_e} p(\xi) u(\xi) d\xi = \int_0^{l_e} \left[ N_1(\xi) p(\xi), N_2(\xi) p(\xi) \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e d\xi =$$

$$= \left[ \int_0^{l_e} N_1(\xi) p(\xi) d\xi, \int_0^{l_e} N_2(\xi) p(\xi) d\xi \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e .$$

$$W_{ze}^p = \left[ F_1^e, F_2^e \right]_e \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

Obciążenie zastępcze (równoważne):

$$F_i^e = \int_0^{l_e} N_i(\xi) p(\xi) d\xi$$

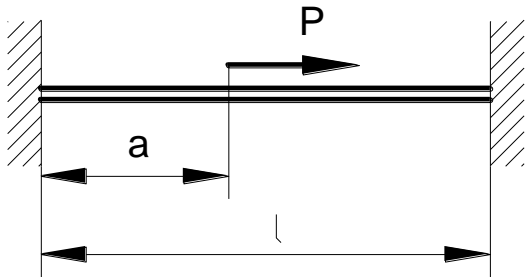
Układ równań:

$$[K] \{q\} = \{F\}$$

Naprężenia w pręcie:

$$\sigma = E\varepsilon = E \left[ N_1'(\xi), N_2'(\xi) \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \frac{E(q_2 - q_1)}{l_e}$$

# Przykład Pręt obciążony siłą skupioną



$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

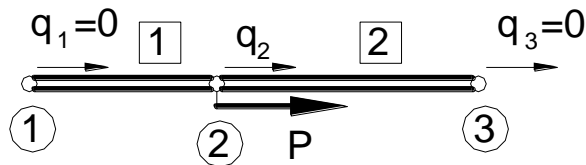
Lokalne wektory parametrów węzłowych

Macierze sztywności elementów:

$$[k]_e^1 = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k]_e^2 = \frac{EA}{l-a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

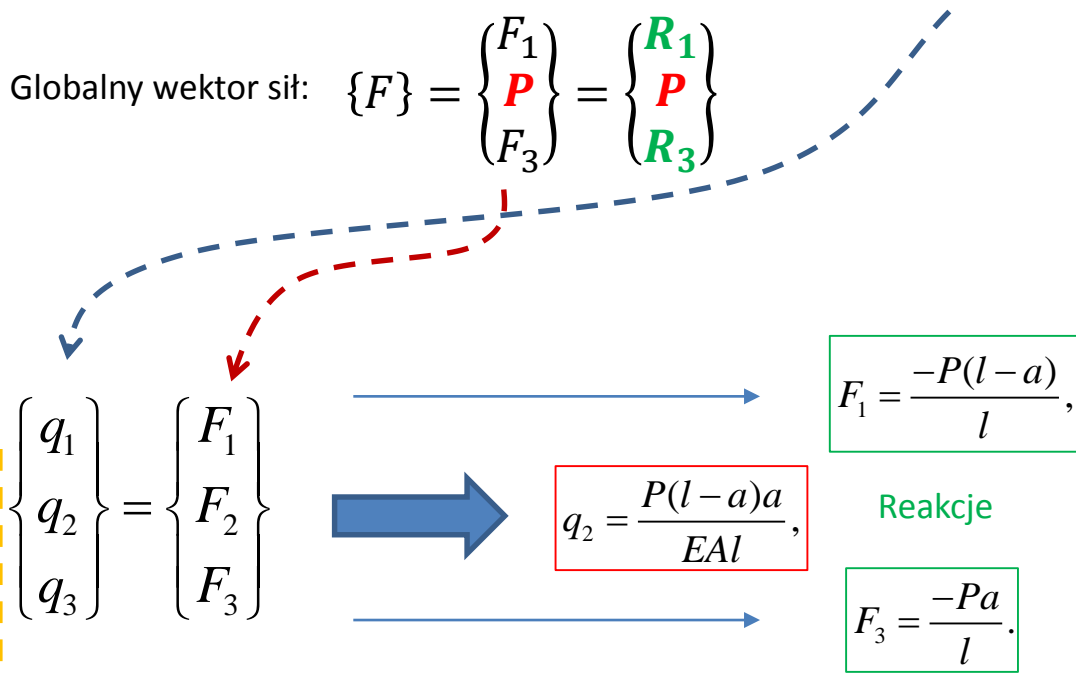
Globalny wektor parametrów węzłowych:  $\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$



Globalny wektor sił:  $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ P \\ R_3 \end{Bmatrix}$

Globalna macierz sztywności:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} & -\frac{1}{l-a} \\ -\frac{1}{l-a} & \frac{1}{l-a} & \frac{1}{l-a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$



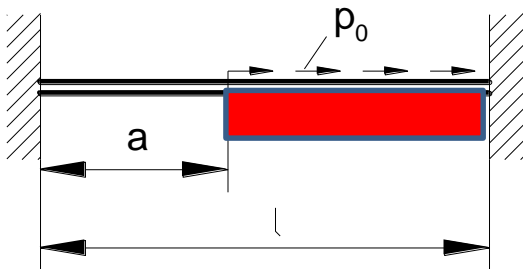
$$F_1 = \frac{-P(l-a)}{l},$$

$$q_2 = \frac{P(l-a)a}{EA l},$$

Reakcje

$$F_3 = \frac{-Pa}{l}.$$

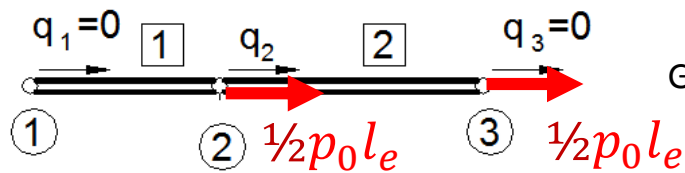
# Przykład Pręt obciążony wydatkiem stałym obciążenia



Globalny wektor parametrów węzłowych:  $\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Siła zastępcza w węźle 1 i 2 elementu 2:

$$F_1^e = \int_0^{l_e} N_1 p_0 d\xi = \int_0^{l_e} \left(1 - \frac{\xi}{l_e}\right) p_0 d\xi = \frac{p_0 l_e}{2} = \frac{p_0(l-a)}{2}$$



Globalny wektor sił:  $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \frac{1}{2} p_0(l-a) \\ R_3 + \frac{1}{2} p_0(l-a) \end{Bmatrix}$

Globalna macierz sztywności:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} & -\frac{1}{l-a} \\ 0 & -\frac{1}{l-a} & \frac{1}{l-a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{p_0(l-a)^2 a}{2lEA}$$

Reakcja w węźle 1

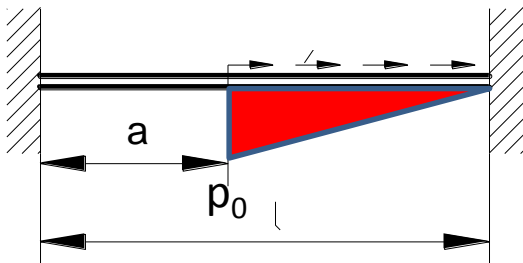
$$F_1 = \frac{-p_0(l-a)^2}{2l}$$

$$F_3 = \frac{-p_0 a(l-a)}{2l}$$

Reakcja w węźle 3:

$$R_3 = F_3 - \frac{p_0(l-a)l}{2l} = \frac{-p_0 a(l-a)}{2l} - \frac{p_0(l-a)l}{2l} = \frac{-p_0(l-a)(l+a)}{2l}$$

# Przykład Pręt obciążony wydatkiem liniowo zmiennym



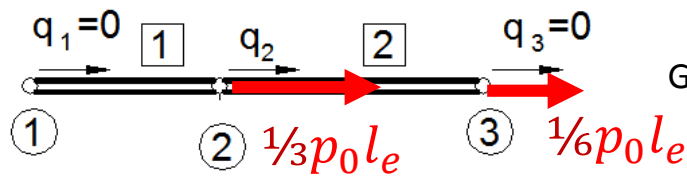
Globalny wektor parametrów węzłowych:  $\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Siła zastępcza w węźle 1 elementu 2:

$$F_1^e = \int_0^{l_e} N_1 p(\xi) d\xi = \int_0^{l_e} N_1 N_1 p_0 d\xi = \frac{p_0 l_e}{3} = \frac{p_0(l-a)}{3}$$

Siła zastępcza w węźle 2 elementu 2:

$$F_2^e = \int_0^{l_e} N_2 p(\xi) d\xi = \int_0^{l_e} N_2 N_1 p_0 d\xi = \frac{p_0 l_e}{6} = \frac{p_0(l-a)}{6}$$



Globalny wektor sił:  $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \frac{1}{3} p_0(l-a) \\ R_3 + \frac{1}{6} p_0(l-a) \end{Bmatrix}$

Globalna macierz sztywności:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} & -\frac{1}{l-a} \\ 0 & -\frac{1}{l-a} & \frac{1}{l-a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Reakcja w węźle 3:

$$R_3 = F_3 - \frac{p_0(l-a)}{6} = \frac{-p_0 a(l-a)}{3l} - \frac{p_0(l-a)l}{6l} = -\frac{p_0(l-a)(l+2a)}{6l}$$

Reakcja w węźle 1

$$F_1 = \frac{-p_0(l-a)^2}{3l}$$

$$q_2 = \frac{p_0(l-a)^2 a}{3lEA}$$

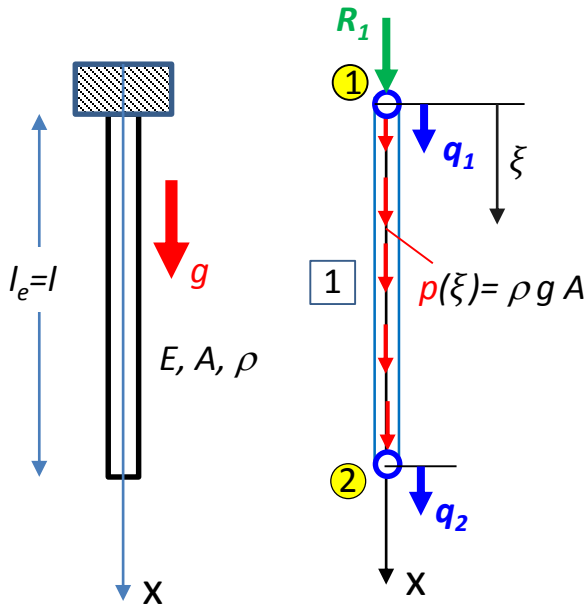
$$F_3 = \frac{-p_0 a(l-a)}{3l}$$



# Przykład

Znaleźć przemieszczenia, odkształcenie i naprężenie w modelu pręta zwisającego w polu grawitacyjnym. Użyć jednego, a potem dwóch elementów. Porównać wyniki z rozwiązaniem ścisłym.

## 1) Jeden element:



$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_1$$

$2 \times 1$

$$\begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_1$$

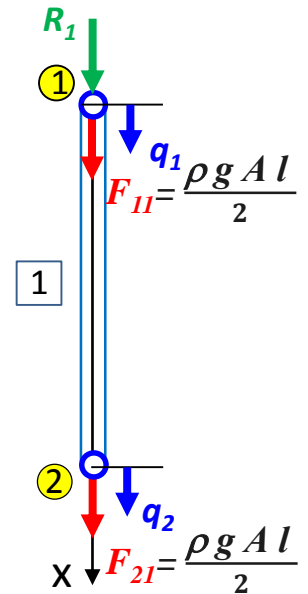
$2 \times 1$

$$[k]_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [K] = [k]_1^*$$

$2 \times 2$                        $2 \times 2$                        $2 \times 2$

$$[F]_1 = [F_{11}, F_{21}]$$

$1 \times 2$



$$F_{11} = \int_0^L p N_1(\xi) d\xi = \rho g A \int_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) d\xi = \rho g A \left(\xi - \frac{\xi^2}{2L}\right) \Big|_0^L = \frac{\rho g A L}{2}$$

$$F_{21} = \int_0^L p N_2(\xi) d\xi = \frac{\rho g A L}{2}$$

$$[F]^e = [F]_1 = [F]_1^*$$

$1 \times 2$                        $1 \times 2$                        $1 \times 2$

$$[F]_{1 \times 2}^n = [R_1, 0], \quad [F]_{1 \times 2} = [F]_{1 \times 2}^e + [F]_{1 \times 2}^n = \left[ \frac{\rho g A L}{2} + R_1, \frac{\rho g A L}{2} \right]$$

$$[K]_{1 \times 2} \cdot \{q\}_{2 \times 1} = \{F\}_{2 \times 1} \Rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\rho g A L}{2} + R_1 \\ \frac{\rho g A L}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \cdot q_2 = \frac{\rho g A L}{2} \Rightarrow q_2 = \frac{\rho g L^2}{2E} \quad + \text{warunek brzegowy } q_1 = 0$$

Przemieszczenia w elemencie:

$$u(\xi) = u(x) = [N] \cdot \{q\}_{1,2} = N_1 \cdot q_1 + N_2 \cdot q_2 = \frac{\xi}{L} \frac{\rho g L^2}{2E} = \frac{\rho g L}{2E} \cdot \xi$$

Odształcenia w elemencie:

$$\epsilon_x = \frac{q_2 - q_1}{L} = \frac{\rho g L}{2E} = \text{const}$$

Naprężenia w elemencie:

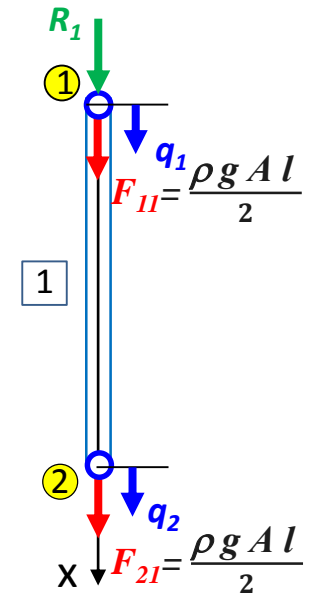
$$\sigma_x = E \epsilon_x = \frac{\rho g L}{2} = \text{const.}$$

Reakcje:

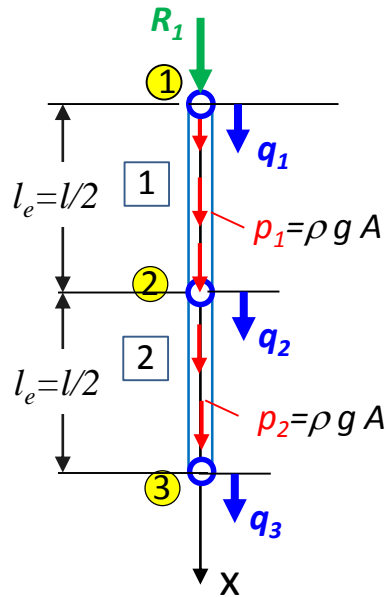
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\rho g L^2}{2E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\rho g AL}{2} + R_1 \\ \frac{\rho g AL}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \left( 1 \cdot 0 - 1 \cdot \frac{\rho g L^2}{2E} \right) = \frac{\rho g AL}{2} + R_1$$

$$R_1 = -\frac{\rho g AL}{2} - \frac{\rho g AL}{2} = -\rho g AL = -m \cdot g$$



## 2) Dwa elementy:



Element 1:

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_1$$

$$[K]_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_1^* = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Element 2:

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}_2$$

$$[K]_2 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2^* = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Globalna macierz sztywności

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

3x1

$$[K] = [K]_1^* + [K]_2^* = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det [K] = 0$$

3x3

Globalny wektor parametrów węzłowych

$$[F]_1 = \int_0^{\frac{L}{2}} \rho_1 N_1 d\xi, \int_0^{\frac{L}{2}} \rho_1 N_2 d\xi = \frac{\rho g A L}{4} [1, 1]$$

$$[F]_2 = \int_0^{\frac{L}{2}} \rho_2 N_1 d\xi, \int_0^{\frac{L}{2}} \rho_2 N_2 d\xi = \frac{\rho g A L}{4} [1, 1]$$

$$[F]_1^* = \frac{\rho g A L}{4} [1, 1, 0]$$

$$[F]_2^* = \frac{\rho g A L}{4} [0, 1, 1]$$

$$[F]^e = \sum_{e=1}^2 [F]_e^* = [F]_1^* + [F]_2^* = \frac{\rho g A L}{4} [1, 2, 1]$$

$$[F]^n = [R_1, 0, 0]$$

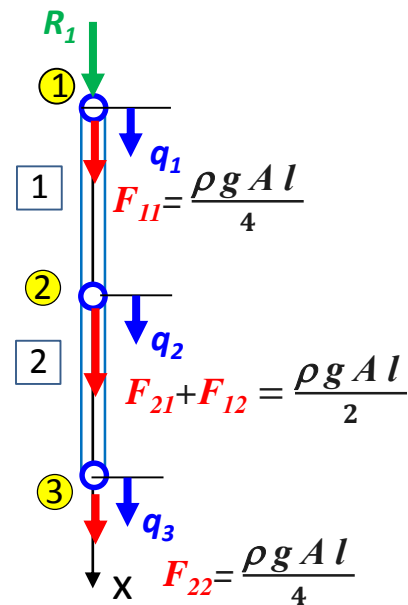
$$[K] \cdot \{q\} = \{F\}$$

$3 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 1$

$$[F] = \left[ R_1 + \frac{\rho g A L}{4}, \frac{\rho g A L}{2}, \frac{\rho g A L}{4} \right]$$

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 + \frac{\rho g A L}{4} \\ \frac{\rho g A L}{2} \\ \frac{\rho g A L}{4} \end{Bmatrix}$$

+ warunek brzegowy  $q_1=0$



$$\underbrace{\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[K]} \cdot \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{39AL}{2} \\ \frac{39AL}{4} \end{Bmatrix}$$

$[K]$   
2x2

$$\det [K]_{2 \times 2} = \left(\frac{2EA}{L}\right)^2 \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) = \left(\frac{2EA}{L}\right)^2$$

$$\det [K]_{2 \times 2} = \left(\frac{2EA}{L}\right)^2 \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) = \left(\frac{2EA}{L}\right)^2$$

$$[K^C]_{2 \times 2} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [K]^T$$

$$[K]^{-1} = \frac{1}{\det [K]_{2 \times 2}} \cdot [K^C]_{2 \times 2}^T = \frac{L}{2EA} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \cdot \frac{39AL}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{39AL^2}{8EA} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{39L^2}{8E} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{3}{8} \frac{39L^2}{E}$$

$$q_3 = \frac{39L^2}{2E}$$

Przemieszczenia w elementach (rozwiązanie MES w elementach):

$$\boxed{1} : u_1(\xi) = \underset{1 \times 2}{[N]} \cdot \underset{2 \times 1}{\{q\}_1} = \left(1 - \frac{\xi}{\frac{L}{2}}\right) \cdot q_1 + \left(\frac{\xi}{\frac{L}{2}}\right) \cdot q_2 =$$

$$= \frac{2\xi}{L} \cdot \frac{3}{8} \frac{\rho g L^2}{E} = \frac{3\rho g L}{4E} \cdot \xi$$

$$x \in \langle 0, \frac{L}{2} \rangle; \quad \xi = x \rightarrow u(x) = \frac{3\rho g L}{4E} \cdot x$$

$$u(0) = 0, \quad u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3}{8} \frac{\rho g L^2}{E}$$

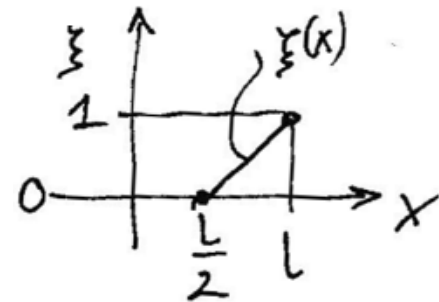
$$\epsilon_{x_1} = \left[ \frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi} \right] \cdot \underset{2 \times 1}{\{q\}_1} = -\frac{2}{L} \cdot q_1 + \frac{2}{L} \cdot q_2 = \frac{3\rho g L}{4E}$$

$$\sigma_{x_1} = E \epsilon_{x_1} = \frac{3\rho g L}{4}$$

$$\boxed{2} \quad u_2(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \cdot \{q\}_2 = \left(1 - \frac{2\xi}{L}\right) q_2 + \frac{2\xi}{L} \cdot q_3 =$$

$$= \frac{3}{8} \frac{\rho g L^2}{E} - \frac{3 \rho g L}{4E} \cdot \xi + \frac{\rho g L}{E} \cdot \xi = \frac{\rho g L}{4E} \cdot \xi + \frac{3 \rho g L^2}{8E}$$

$$x \in \left(\frac{L}{2}, L\right) ; \quad \xi(x) = x - \frac{L}{2}$$



$$u_2(x) = \frac{\rho g L}{4E} \cdot x + \frac{\rho g L^2}{4E} = \frac{\rho g}{4E} (x \cdot L + L^2)$$

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3}{8} \frac{\rho g L^2}{E}, \quad u(L) = \frac{\rho g L^2}{2E}$$

$$\epsilon_{x_2} = \left[ \frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi} \right] \cdot \{q\}_2 = -\frac{2}{L} q_2 + \frac{2}{L} q_3 = \frac{2(q_3 - q_2)}{L} = \frac{\rho g L}{4E}$$

$$\sigma_{x_2} = E \epsilon_{x_2} = \frac{\rho g L}{4}$$



Reakcje:

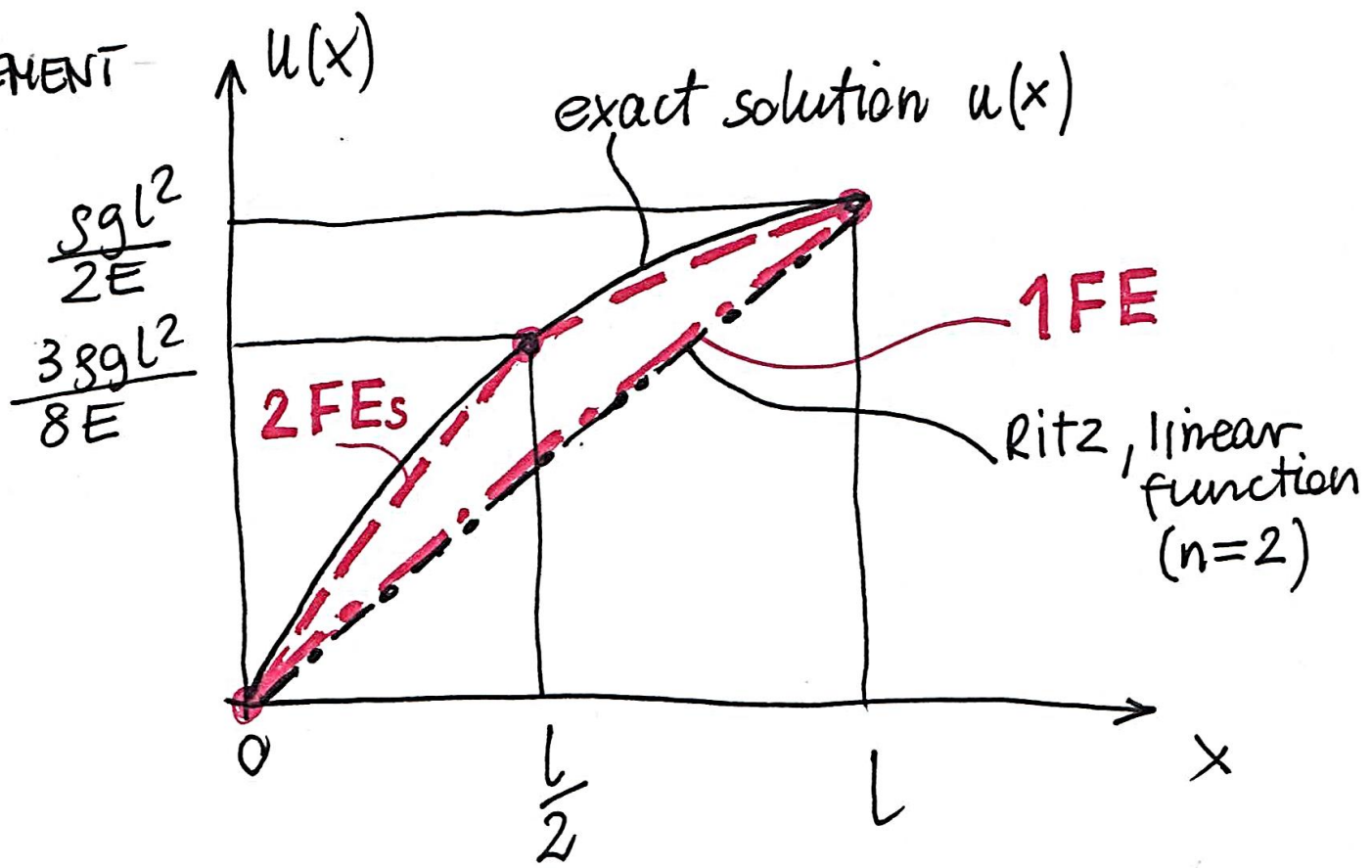
$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\rho g l^2}{8E} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 + \frac{\rho g AL}{4} \\ : \\ . \end{Bmatrix}$$

$$\frac{2EA}{L} (1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4) \cdot \frac{\rho g l^2}{8E} = R_1 + \frac{\rho g AL}{4}$$

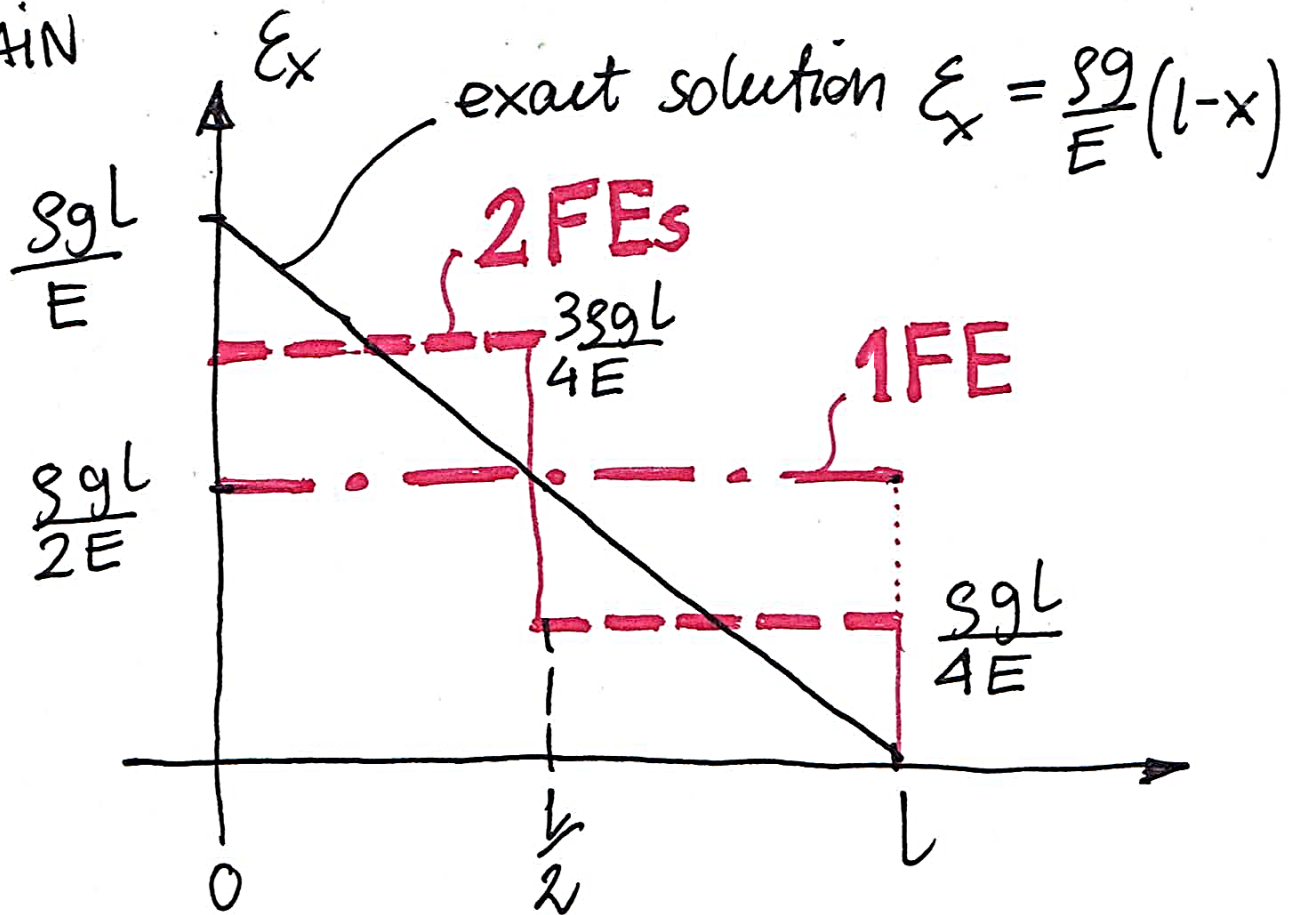
$$-\frac{3}{4} \rho g AL - \frac{1}{4} \rho g AL = R_1$$

$$R_1 = -\rho g AL = -mg$$

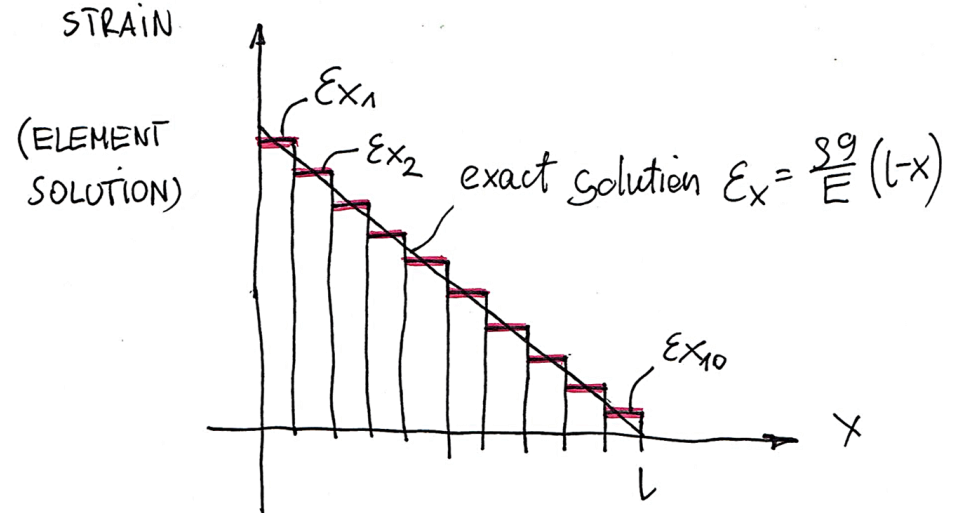
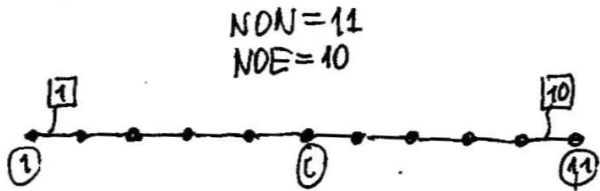
DISPLACEMENT



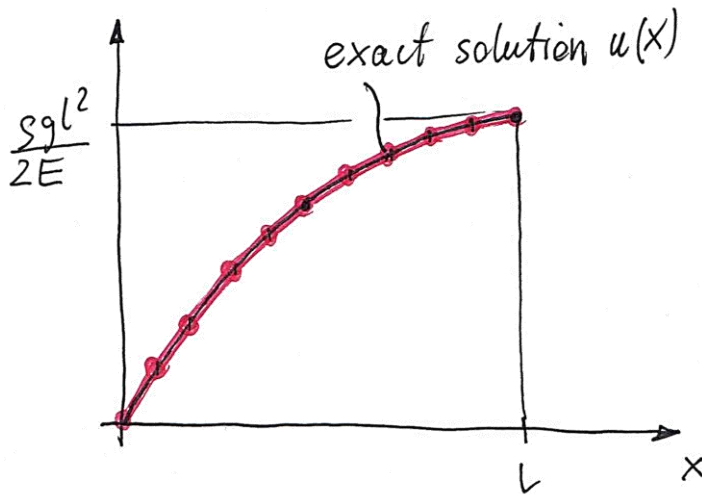
STRAIN



# 10 elementów skończonych



DISPLACEMENT



STRAIN  
(NODAL SOLUTION)

